A Mathematical Approach to Patterns: The Classification of Korean Traditional Frieze Patterns According to Group Theory

Hyunyong Shin[1], Shilla Sheen[1]

[1] Korea National University of Education

Abstract

Background Group theory, which is called the theory of symmetry, may be useful in the understanding, classification, and generation of patterns since symmetry is one of the important factors of pattern design. In this article, we propose and solve the following research questions.

· What kinds of symmetries are in patterns?

· What are the seven types of frieze patterns?

· What are the examples of the Korean traditional frieze pattern for each type?

· How can we generate new patterns from the given motif by applying symmetry?

Methods To answer the first and the second questions, we study some facts in group theory which are related with pattern understanding. For the third question, we search for and classify the traditional patterns for each type from the relics of South Korea and North Korea. To answer the last question, we produce various patterns from the given motif through symmetry.

Results Translation, rotation, reflection, and glide reflection are the types of symmetry found in patterns. There are seven types of frieze patterns. We present the Korean(South and North) traditional frieze patterns for each type. We also show how to generate new patterns by applying translation, rotation, reflection, or glide reflection.

Conclusion A mathematical approach to patterns is logical, systematic and objective. By presenting patterns for all types of friezes, we can claim the objectivity of a variety of Korean traditional patterns. We also assert that mathematical classification makes it possible for computers to create various patterns.

Keywords Frieze, Mathematics, Group Theory, Symmetry, Type, Korean Traditional Pattern

Citation: Shin, H., & Sheen, S. (2014). A Mathematical Approach to Patterns: The Classification of Korean Traditional Frieze Patterns According to Group Theory. *Archives of Design Research, 27*(3), 295-311.

http://dx.doi.org/10.15187/adr.2014.08.111.3.295

Received Mar. 10. 2014 **Reviewed :** Apr. 07. 2014 **Accepted :** Apr. 07. 2014
pISSN 1226-8046 **eISSN** 2288-2987

1. 서론

1.1. 연구의 배경

레오나르드 다 빈치와 뒤러 등 여러 미술가는 미술에서 수학의 중요성을 강조하곤 하였다(Atalay, 2006; Da Vinci, 1897; Elam, 2011). 특히, 레오나르드 다 빈치는 “Non mi legga chi non è matematico. 수학자가 아닌 사람은 내 책을 읽지 마라.”라고 기록한 것으로 전해진다(Kline, 1967; Vezzosi, 1996). 실제로, 수학적 개념이 디자인이론을 비롯한 미술 이론 전반에 유용할 수 있다는 것은 주지하는 바이다. 예를 들어, 피보나치수열(Fibonacci sequence), 황금비(golden ratio), 또는 사영(projection) 등과 같은 수학적 개념은 여러 미술 작품을 분석하고 이해하는 데에 도움이 된다(Elam, 2011; Kye, 2014).

미술 특히 디자인에서 중요한 수학적 개념 중의 하나가 대칭(symmetry)이다. 대칭은 황금비와 함께 아름다움(美)의 주요 요소이기 때문이다. 대칭은 현대 수학에서도 중요한 개념이며 군론(群論, group theory)은 현대수학의 핵심 영역 중 하나로서 보통 “대칭이론(theory of symmetry)”이라고 불린다.

한편, 대칭은 디자인이나 문양의 중요한 미적 요소이며 조형 원리 중 하나로서 회화와 건축에서도 대칭이 사용되는 실례를 쉽게 찾아 볼 수 있고(Won, 2011), 수학적 대칭성은 시각적 교육모형의 개발에도 활용될 수 있다(Koo & Ha, 2011). 특히, 디자인 분야에서는 의상이나 포장지 그리고 벽지 등에서 대칭의 원리가 적용된 패턴을 어렵지 않게 볼 수 있다. 대칭의 원리를 통한 디자인에서는 균형미와 안정감을 느낄 수 있기 때문일 것이다. 또, 대칭을 통한 미적 표출은 오래 전부터 여러 나라에서 이루어져 왔으며 한국도 예외는 아니다. 단청, 한복, 도자기 등에서 사용 된 반복적인 패턴, 즉 대칭 원리를 적용한 전통 문양을 살펴 볼 수 있는 것이다. 대칭은 선조들의 조형적 감각과 전통미를 엿볼 수 있게 하는 단초를 제공한다.

위와 같은 까닭으로 인하여 문양(pattern)이나 디자인 연구에서 군론을 통한 수학적 접근은 자연스러운 시도라고 할 수 있다. 이를 위해 문양이나 디자인과 관련되는 대칭성의 수학적 개념이나 용어를 분명히 할 필요가 있고, 그러한 개념들을 문양의 분류 등 디자인의 이해와 연구에 직접 적용하는 시도는 바람직하다고 여겨진다.

1.2. 연구의 목적

한 나라 문화의 특징은 그 나라의 전통문양에서 어느 정도 가늠할 수 있다. 전통문양에는 민족의 정서와 미의식이 함축되어 있기 때문이다. 따라서 우리의 전통문양을 잘 이해하고 현대적 관점에서 재구성함으로써 한국적 문양 디자인으로 계승발전 시키면 민족의 미적 의식을 발휘할 수 있을 것이다(Lim & Kim, 2005).

전통문양에 관한 깊이 있는 이해를 위해서는 문양의 체계적인 분류가 필수적인 과정이다. 그러나 분류 방식이 객관적이지 못하고 누구나 공감할 수 있는 정확한 기준에 근거하지 않으면 타당성과 신뢰성을 확보하기 어렵다. 수학적 분류는 그 이론과 절차가 이론적이고 체계적이며 주관적 요소가 완전히 배제되기 때문에 객관적이며 합리적인 접근이 될 수 있을 것이다. 특히, 한국 전통문양의 다양성에 관한 객관성을 확보하기 위해서는 전통문양에 대한 수학적 접근은 필요하다. 이런 맥락에서 수학적 분류에 따라 한국의 여러 가지 전통 문양을 제시하는 것은 의미가 있을 것이다.

한편, 디자인에 관한 수학적 접근은 디자인의 프로그램화를 가능하게 한다. 이는 컴퓨터를 활용하여 다양한 문양을 디자인 할 수 있게 하므로 현대 감각에 맞는 한국 전통문양을 디자인할 수 있게 할 것이다.

1.3. 연구 문제

이 연구에서는 문양에서 관찰되는 대칭의 종류는 어떤 것들이 있으며, 군론에 의한 일곱 개의 띠 타입은 무엇이지 조사하고, 일곱 개의 띠 타입 각각에 해당하는 한국의 전통 띠 문양을 구체적으로 제시한다. 마지막으로, 군론(대칭)에 의한 문양 생성 방안은 무엇인지 예를 통하여 살핀다. 연구 문제를 구체적으로 명시하면 다음과 같다.

1.3.1. 문양에는 어떤 대칭이 있는가?
1.3.2. 군론에 의한 일곱 개의 띠 타입은 무엇인가?
1.3.3. 띠 타입 각각에 해당하는 한국의 전통 문양의 예는 무엇인가?
1.3.4. 대칭을 적용하여 띠 문양을 생성하는 방법은 무엇인가?

1.4. 연구 방법 및 절차

연구문제를 해결하기 위하여 문양과 관련되는 군론을 조사하여 처음 문제와 두 번째 문제의 답을 구한다. 세 번째 문제가 이 연구의 핵심이다. 이 문제에 대해서는 남한과 북한 각각에서 예를 찾아 이 글의 목적에 맞게 제시함으로 답한다. 남한의 경우에는, 각 타입에 해당하는 띠 문양을 찾기 위해서 전국의 박물관, 사찰, 또는 미술관 등 각 기관이 제공하는 인터넷 자료를 통하여 띠 문양을 조사한 후, 각 타입에 해당하는 문양을 제시하되 대칭성을 표시한다. 북한의 경우에는 신뢰할만한 자료를 통하여 문양을 조사하고 각 타입에 따른 문양을, 대칭성을 표시하며 제시한다. 마지막 문제의 해결을 위하여 간단한 기본 문양을 하나 주고, 거기에 대칭을 적용하여 여러 문양을 생성하는 방법을 예를 들어 제시한다.

1.5. 용어의 정의

1.5.1. 대칭

보통 사람은 “대칭”이라고 하면 좌 우 또는 상 하 반사를 떠올리지만, 수학이나 물리학에서 대칭은 더 넓은 의미를 가진다. 즉, 주어진 문양에 어떤 변환(transformation)을 적용하여도 그 문양의 모습이 변하지 않을 때, 그 변환을 해당 문양의 대칭이라고 한다. 이런 의미에서 반사뿐만이 아니라 모양을 변화시키지 않는 평행이동이나 회전도 대칭임을 알 수 있다.

1.5.2. 군론

군론은 대칭의 특징과 성질을 설명하는 수학이론이다. 군론이 대칭 이론이라고 불리는 이유는 대칭의 개념과 성질에 관한 이론이기 때문이다. 군론은 일차원 문양인 띠(frieze)와 이차원 문양인 벽지(wallpaper)는 물론이거니와 삼차원 또는 그 이상의 초월 공간에서의 문양도 논의하고 분류할 수 있게 한다. 군론에서 문양을 논의할 때, 문양의 색(color)은 고려하지 않는다.

1.5.3. 전통문양

이 글에서 뜻하는 전통문양은 우리나라의 궁궐이나 사찰 등과 같은 유적지, 또는 도자기나 전통 의복 등에 그려진 것으로 조선시대 이전의 것을 뜻한다. 예술가에 의해 근래에 제작된 문양은 고려하지 아니 한다.

1.5.4. 띠

일정한 조각이 좌·우로 반복되는 문양을 띠(frieze), 반복되는 조각을 “기본조각(fundamental domain)”이라고 한다. 예를 들어, 아래 그림은 띠 문양의 한 예로서 점선으로 그린 네모 안의 부분이 기본조각이며, 이 부분이 좌우로 반복되는 것이다.

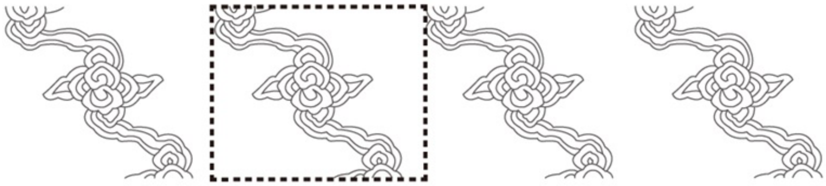


Figure 1 Frieze and fundamental domain

이 글에서는 특별한 언급이 없는 한, 문양은 띠를 뜻한다.

1.5.5. 타입

아무리 섬세한 문양이라고 하더라도 그 문양에 존재하는 대칭은 많아야 네 가지(평행이동, 회전, 반사, 미끄럼반사) 뿐이다. 이 네 가지 대칭이 서로 결합하여 다양한 모양의 문양을 생성하게 된다. 그러나 아무리 복잡하게 결합한다고 하더라도 결국은 일곱 가지 경우밖에 없다는 것은 수학적으로 증명된다. 이 글에서는 이 일곱 가지 경우 각각을 타입이라고 부른다.

2. 이론적 배경

2.1. 문양에 관한 수학적 접근

이슬람문양의 다양성은 가끔 언급된다. 색을 고려하지 않는다고 하더라도 이슬람 문명이 낳은 문양은 얼핏 보아도 “다양하다” 또는 “섬세하다”는 느낌을 준다. “우리나라 전통문양도 이슬람 전통문양 못지않게 다양하고 섬세하다”라는 주장을 하고자 할 때, 한 가지 설득력 있는 방안은 “수학적 접근”이다. “수학적 접근”은 객관적이고 논리적이며, 또 체계적인 근거를 제공하고 더 나아가 대칭성의 정도를 계산할 수 있기 때문이다(Shin, Lyu, Moon, & Sheen, 2014).

수학에서 군론은 수학 자체의 필요에 의해 정립된 이론이지만, 수학 외 분야에서 군론의 효용성은 하나하나 열거하기 어렵다. 군론은, 특히, 문양을 분류하고 분석함에 있어서도 매우 유용하다(Burn, 1985; Du Sautoy, 2008).

2.2. 선행연구

띠나 벽지에 관한 수학적 연구는 매우 활발하게 이루어졌으나(P lya, 1924; Schattschneider, 2010), 수학이론을 적극적으로 활용한 문양 연구를 찾지는 못하였다. 군론을 본격적으로 적용하였다고는 볼 수 없지만 문양을 대칭의 관점으로 본 국내 유일한 연구로는 Lee(2010)가 있다. 그러나 그의 연구는 띠가 아닌 벽지에 관한 것으로서 수학적 개념이 잘 못 이해되었거나 잘 못 적용되어 다소의 오류를 범하였다. 이러한 현상은 대칭성에 관한 수학적 개념의 혼란으로 야기된 것이라 사료된다.

3. 네 가지 대칭

수학은 문양을 대칭의 관점에서 분류한다. 문양에서 생각할 수 있는 대칭은 다음과 같은 네 가지이다. 이 사실은 군론을 적용함으로써 쉽게 알 수 있다(Shin, Lyu, Moon, & Sheen, 2014). 문양 위에 그려진 점선은 기본조각을 나타낸다.

3.1. 평행이동(translation)

정해진 방향을 따라 일정한 길이만큼 이동시키는 변환이다. 아래 그림에서 띠 전체를 좌우로 일정한 길이만큼 평행이동 시켜도 그 문양의 모습에는 아무런 변화가 없다. 즉, 이 문양에는 평행이동 대칭이 있다.

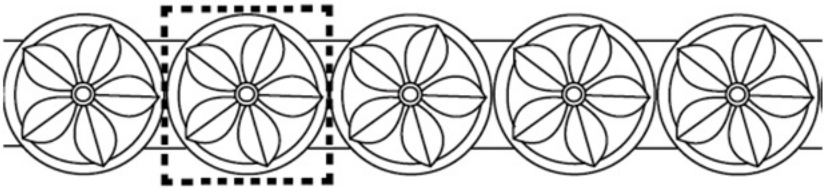


Figure 2 Translation

“좌·우로 반복되는 문양”이라는 띠의 정의에 따라 모든 띠 문양에는 평행이동 대칭이 항상 존재한다. 따라서 띠의 대칭성을 살피고자 할 때, 띠 전체 대신에 기본조각(점선으로 그린 네모 안의 부분)의 대칭성만 살피면 충분하다. 또, 평행이동은 기본조각의 x－축 방향 길이의 배수만큼 이루어져야 한다는 것을 알 수 있다.

3.2. 회전(rotation)

정해진 축으로 일정한 각도만큼 회전시키는 변환이다. 아래 그림에서 띠 전체를 점 를 축으로 180˚회전시켜도 문양의 모습에는 아무런 변화가 없다. 즉, 이 문양에는 180˚회전 대칭이 있다.

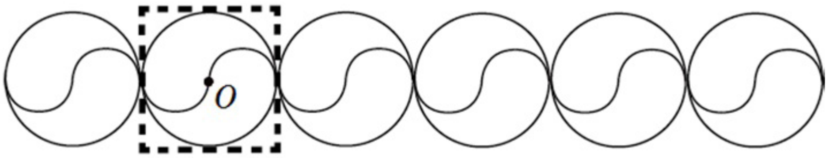


Figure 3 Rotation

이 문양에서 180˚회전의 축은 점 외에도 무수히 많다는 것을 주목할 수 있다. 여기서 또 하나 유념할 것은, 2차원적 문양인 벽지에서는 0˚회전(360˚회전), 60˚회전, 90˚회전, 120˚회전, 그리고 180˚회전 등 여러 각도의 회전을 생각할 수 있지만, 1차원적 문양인 띠에서는 0˚회전(360˚회전)과 180˚회전만 생각할 수 있다는 것이다.

3.3. 반사(reflection)

정해진 축에 관하여 반사시키는 변환이다. 아래 그림에서 띠 전체를 점 x－축에 관하여 반사시켜도 문양의 모습에는 아무런 변화가 없다. 즉, 이 문양에는 x－축 반사 대칭이 있다.

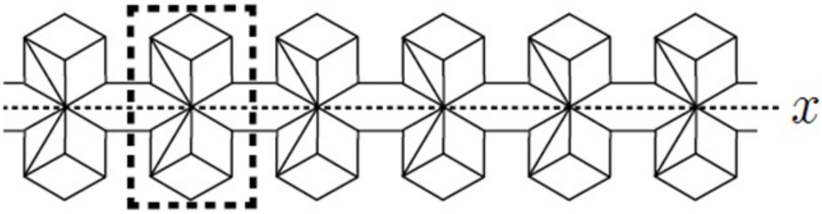


Figure 4 Reflection by x－axis

한편, 아래 그림에서는 띠 전체를 점 $y-$축에 관하여 반사시켜도 문양의 모습에는 아무런 변화가 없다. 즉, 이 문양에는 $y-$축 반사 대칭이 있다.

Figure 5 Reflection by $y-$axis

여기서 축 반사의 $y-$축은 무수히 많다는 것을 주목할 수 있다. 좌표변환을 통하여 반사 축인 $y-$축을 다르게 잡을 수 있기 때문이다.

3.4. 미끄럼반사(glide reflection)

정해진 축을 따라 일정한 거리만큼 평행이동 한 후 그 축에 관하여 반사시키는 변환이다. 아래 그림에서 띠 전체를 $x-$축을 따라 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동 시킨 후 그 축에 관하여 반사시켜도 문양의 모습에는 아무런 변화가 없다. 즉, 이 문양에는 $x-$축 미끄럼반사 대칭이 있다.

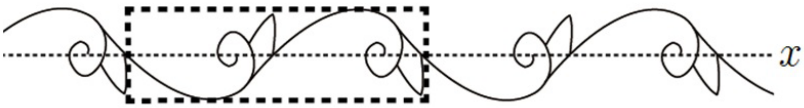


Figure 6 Glide reflection by $x-$axis

여기서 "$\frac{1}{2}$"은 "기본조각의 $x-$축 방향의 길이의 반($\frac{1}{2}$)"을 의미한다. 따라서 "미끄럼반사"는 "평행이동 후 반사"가 아니라는 것을 주목하여야 한다. 문양의 대칭에서 평행이동은 "기본조각의 $x-$축 방향의 길이"의 정수 배만큼 이동하는 것을 뜻한다. 즉, …, -3 배(왼쪽으로 세 칸), -2 배(왼쪽으로 두 칸), -1 배(왼쪽으로 한 칸), 0배(이동 없음), 1배(오른쪽으로 한 칸), 2배(오른쪽으로 두 칸), 3배(오른쪽으로 세 칸), …만큼의 이동을 뜻하는 것이다. 미끄럼반사는 "$x-$축을 따라 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동 시킨 후 그 축에 관하여 반사"시키는 변환이므로 "평행이동 후 반사"라고 할 수 없다. 즉, 미끄럼반사는 평행이동이나 반사 또는 회전을 적절히 시행하여 얻을 수 있는 대칭이 아닌 독립적인 대칭인 것이다.

한편, $y-$띠 문양에서는 축 미끄럼반사는 생각하지 않는다. 따라서 이 글에서 말하는 미끄럼반사는 모두 $x-$축 미끄럼반사이다.

이 글에서는 편의를 위해, "평행이동 대칭", "회전 대칭", "반사 대칭", 그리고 "미끄럼반사 대칭"을 각각 "평행이동", "회전", "반사", 그리고 "미끄럼반사"라고 한다.

4. 띠의 일곱 가지 타입

기본적인 군론을 적용하여 대칭성에 의한 띠를 분류하면 다음과 같은 일곱 개의 타입만 존재한다는 것을 쉽게 증명할 수 있다(Shin, Lyu, Moon, & Sheen, 2014).

Table 1 Notations for frieze types

기호	대칭성
$f1$	평행이동
fx	평행이동, x ⁻축 반사
fy	평행이동, y ⁻축 반사
$f2$	평행이동, 180°회전
fxy	평행이동, x ⁻축 반사, y ⁻축 반사
fg	평행이동, 미끄럼반사
fgy	평행이동, 미끄럼반사, y ⁻축 반사

띠의 타입에 관하여 국제적으로 통일된 기호가 없으나 이 글에서는 위의 표(Table 1)와 같이 나타낸다. 여기서 “ f ”는 “띠(frieze)”를, “1”과 “2” 각각은 " $\frac{360^\circ}{1} = 360^\circ$ 회전”과 “ $\frac{360^\circ}{2} = 360^\circ$ 회전”을 나타내고, “ x ”, “ y ”, “ g ” 각각은 “x ⁻축 반사”, “y ⁻축 반사”, “미끄럼반사(glide reflection)”를 나타낸다.

5. 군론적 분류에 따른 한국의 전통문양

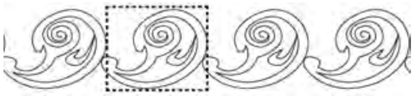
이제, 띠의 일곱 개 타입 각각에 해당하는 우리나라 전통 문양을 제시한다. 여기서 제시하는 각 문양의 아래에 해당 문양을 다시 그리고 그 위에 기본조각과 대칭성을 표시한다. 즉, 원본 문양을 간략한 선화로 바꾸고 그 위에 대칭성을 나타낸다. 이때, 대칭성을 나타내는 기호로서 는 180° 회전축을, 는 반사 축을, 그리고 는 미끄럼반사 축을 나타낸다. 평행이동은 모든 문양에 항상 존재하므로 별도로 표시하지 않는다.

남한에서 찾은 예를 먼저 제시하고, 이어서 북한에서 찾은 문양을 제시한다. 북한의 경우는 조선유적유물도감편찬위원회(Editorial Board of Chosun Relics, 2002)에서 얻었다.

5.1. $f1$ 이 타입의 문양에는 평행이동만 있다.

5.1.1. 국립중앙박물관 연꽃구름무늬벽돌

Table 2 Pattern and symmetry of $f1$

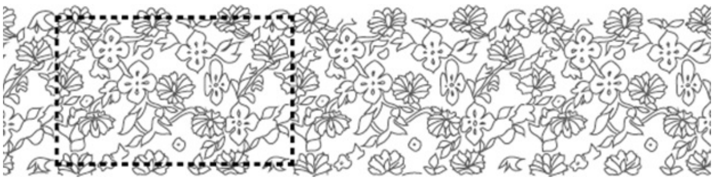
구분	
원본	 
선화	

원본 문양에서 두 개의 동심원으로 둘러싸인 문양으로서 기본조각(점선 안 부분)의 평행

이동에 의해서만 만들어진다. 이 문양의 원본은 섬세한 도구를 사용하지 않고 그렸기 때문에 완벽한 평행이동과 다소의 차이가 있을 수 있다. 그러나 이 문양에서 평행이동을 염두에 둔 작가의 의도는 의심할 여지가 없다.

5.1.2. 강원도 안변군 안변보현사 보광전 대들보모루사이무늬

Table 3 Pattern and symmetry of $f1$

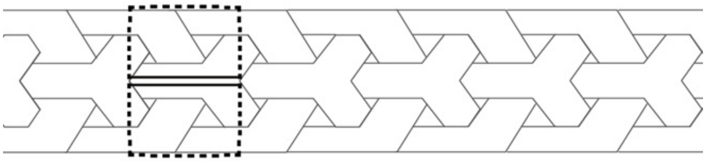
구분	
원본	
선화	

이 문양에서도 완벽한 평행이동과 다소의 차이가 있을 수 있지만 평행이동을 염두에 둔 작가의 의도는 의심할 여지가 없다.

5.2. fx 이 타입의 문양에는 평행이동과 x -축 반사가 있다.

5.2.1. 충남 공주 동학사 대웅전 처마

Table 4 Pattern and symmetry of fx

구분	
원본	
선화	

5.2.2. 평안남도 평원군 훈련정 도루장여모루무늬

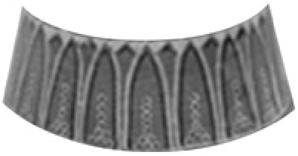
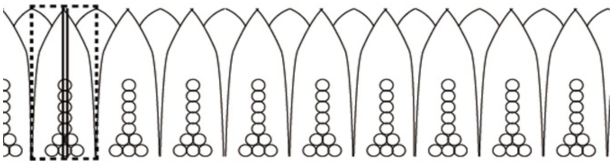
Table 5 Pattern and symmetry of fx

구분	
원본	
선화	

5.3. fy 이 타입의 문양에는 평행이동과 y -축 반사가 있다.

5.3.1. 간송미술관 청자상감운학문매병(국보68호)

Table 6 Pattern and symmetry of fy

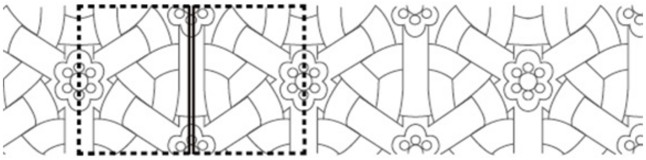
구분		
원본		
선화		

원본 왼쪽의 청자상감운학문매병 그림 아랫부분에 있는 문양이다.

5.3.2. 평안북도 태천군 양화사 대웅전 서까래평고대무늬

Table 7 Pattern and symmetry of fy

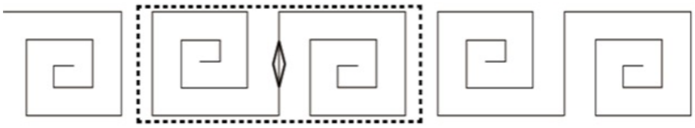
구분	
원본	

선화	

5.4. $f2$ 이 타입의 문양에는 평행이동과 180˚회전이 있다.

5.4.1. 국립 고궁 박물관 보자기

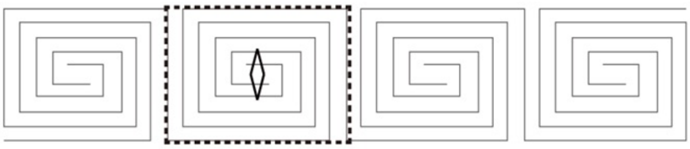
Table 8 Pattern and symmetry of $f2$

구분	
원본	 
선화	

원본 왼쪽에 있는 보자기 그림에서 두 개의 동심원으로 둘러싸인 문양이다.

5.4.2. 코끼리 모양 손잡이 놋향로

Table 9 Pattern and symmetry of $f2$

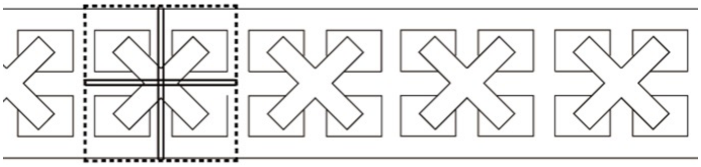
구분	
원본	
선화	

이 놋향로는 강원도 고산군 설봉리 석왕사에서 출토되었다(Editorial Board of Chosun Relics, 2002).

5.5. fxy 이 타입의 문양에는 평행이동, x-축 반사, 그리고 y-축 반사가 있다.

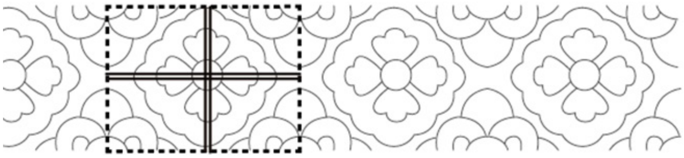
5.5.1. 충남 공주 동학사 대웅전 처마

Table 10 Pattern and symmetry of fxy

구분	
원본	
선화	

5.5.2. 함경남도 영광군 용흥사 대웅전 도루장여밑무늬

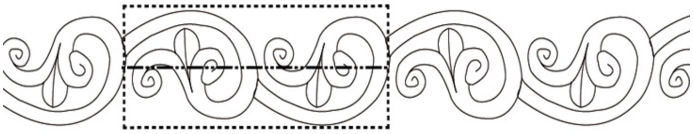
Table 11 Pattern and symmetry of fxy

구분	
원본	
선화	

5.6. fg 이 타입의 문양에는 평행이동과 미끄럼반사가 있다.

5.6.1. 국립중앙박물관 금제 아미타 불좌상

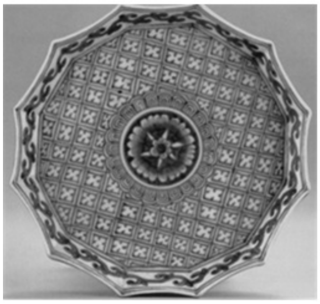
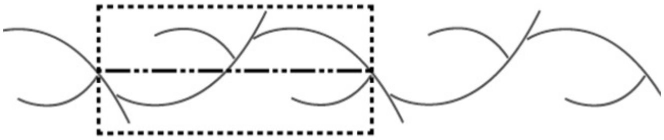
Table 12 Pattern and symmetry of fg

구분	
원본	 
선화	

원본 왼쪽 사진에서 부처상 주위를 둘러싸고 있는 문양이다.

5.6.2. 청화 백자 꽃무늬 12각 접시

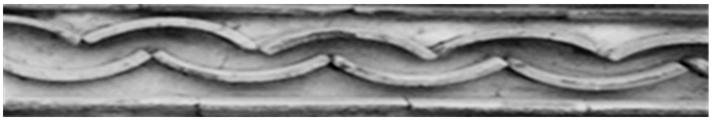
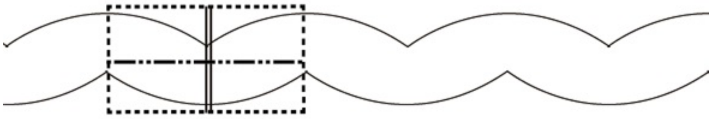
Table 13 Pattern and symmetry of fg

구분	
원본	 
선화	

위 유물은 조선유적유물도감편찬위원회(2002) Ⅲ권 99쪽에 소개되어 있으나 소장 처는 밝히지 않았다. 위 원본 그림 왼쪽에 있는 접시 그림에서 가장자리에 있는 테두리 문양이다.

5.7.1. 전북 전주 한옥 마을 담

Table 14 Pattern and symmetry of fgy

구분	
원본	
선화	

5.7.2. 평양시 중구역 연광정 평고대무늬

Table 15 Pattern and symmetry of fgy

구분	
원본	
선화	

6. 군론적 기법에 의한 띠의 생성

띠의 각 타입에 해당하는 문양을 군론적 기법을 적용하여 생성하여보자.

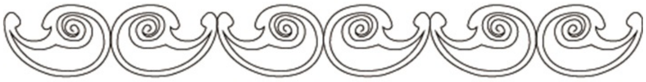
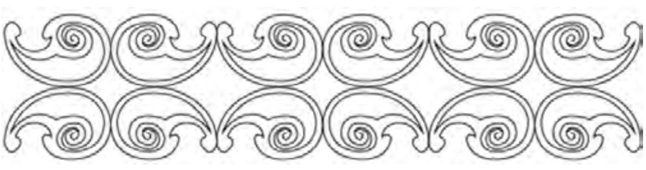
먼저, 간단한 형태로 주어진 문양을 모티브(motif)로 하여 기본조각을 생성한다. 이때, 모티브 자체를 기본조각으로 사용하는 경우도 있고, 모티브에 다양한 대칭을 적용하여 좀 더 복잡한 문양의 기본조각을 생성하는 경우도 있다. 마지막으로, 생성된 기본조각을 평행이동시킴으로써 띠 문양을 만든다. 주어진 모티브는 다음과 같다.

Figure 7 Motif

이제, 이 모티브로부터 대칭을 적절히 적용하여 일곱 개 타입 각각에 해당하는 기본조각과 띠를 생성하여 보자. 띠는 기본조각의 단순한 평행이동으로 생성되므로 각 타입의 기본조각에 대해서만 언급한다. 먼저, $f1$ 타입에서는 모티브 자체가 기본조각이다. fx 타입(fy 타입)에는 x –축 반사(y –축 반사)가 있어야하므로 모티브를 x –축에 관하여(y –축에 관하여) 반사시켜 기본조각을 얻는다. $f2$ 타입에는 180°회전이 있어야하기 때문에 적절한 점을 회전축으로 하여 모티브를 180°회전시켜 기본조각을 얻는다. fxy 타입에서는 fx 타입(fy 타입)의 기본조각을 y –축에 관하여(x –축에 관하여) 반사시킴으로 기본조각을 얻는다.

fg 타입을 위해서는 x –축을 따라 모티브를 $\frac{1}{2}$ 만큼 이동한 후 x –축에 반사시킴으로써 기본조각을 얻는다. 이때, $\frac{1}{2}$ 만큼 이동하는 과정에서 모티브 왼쪽에 있던 부분 일부가 기본조각의 일부가 된다는 것을 유념한다. 비슷한 과정을 통하여 fgy 타입의 기본조각을 얻을 수 있는데, 이때에도 모티브 왼쪽에 있던 부분 일부가 기본조각의 일부가 된다는 것에 유념한다.
이상을 종합하여 표로 나타내면 다음과 같다.

Table 16 Examples of seven types of frieze

기호	대칭성	기본조각	띠
$f1$	평행이동		
fx	평행이동, x –축 반사		
fy	평행이동, y –축 반사		
$f2$	평행이동, 180°회전		
fxy	평행이동, x –축 반사, y –축 반사		
fg	평행이동, 미끄럼반사		

fgy	평행이동, 미끄럼반사, y −축 반사	

7. 결론

이 연구에서는 문양에서 도출할 수 있는 대칭은 어떤 것들이 있으며, 군론에 의한 일곱 개의 띠 타입은 무엇인지 살펴본 후, 각각의 띠 타입에 해당하는 한국의 전통 문양의 예를 제시하였고, 마지막으로, 이 연구는 대칭을 이용하여 새로운 문양을 얻는 방법은 무엇인지 예를 들어 알아보았다.

디자인의 수학적 접근은 논리적이고 체계적인 기준에 근거하고 패턴의 특성을 수치화 하므로 객관성을 확보할 수 있게 한다. 또, 이러한 접근은 문양 디자인을 프로그램화하여 컴퓨터를 활용하여 다양한 문양을 디자인 할 수 있게 한다. 실제로, 수학(특히 대칭)의 개념과 성질을 정확히 이해하면 좀 더 복잡한 패턴 구성을 디자인할 수 있다(Won, 2011).

8. 제언

이 글에서는 띠의 분류에 따른 예시가 남한과 북한 각각에서 하나씩 제시되었으나 더 많은 예시를 통해 논의되는 것 역시 의미 있을 것이다.

띠가 일차원적 문양이라면 벽지는 이차원적 문양이다. 즉, 좌·우는 물론이거니와 상·하로 기본조각이 반복되는 문양이 벽지이다. 띠에 관한 수학(군론)적 분류가 가능하듯이 벽지에 관한 수학적 분류도 가능하다. 벽지 각각의 타입에 해당하는 한국의 전통 벽지 문양은 어디에서 무엇을 찾을 수 있는지 등에 관한 연구를 수행하는 것도 의미가 있을 것이다.

Reference

1 Atalay, B. (2006). *Math and the Mona Lisa.* Washington: Smithsonian Books.
2 Burn, R. P. (1985). *Groups A Path To Geometry.* Cambridge: Cambridge University Press.
3 Da Vinci, L. (1897). *Treatise on Painting.* London: George Bell & Sons.
4 Du Sautoy, M. (2008). *Symmetry.* New York: Harper.
5 Editorial Board of Chosun Relics (2002). *북한의 문화재와 문화유적 조선시대 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ[Cultural Assets of North Korea Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ].* Seoul. Seoul: National University.
6 Elam, K. (2011). *Geometry of Design.* New York: Princeton Architectural Press.
7 Kline, M. (1967). *Mathematics for the Nonmathematician.* New York: Dover.
8 Koo, J., & Ha, B. (2011). Study on the development of visual education model of 17 plane symmetry groups, Bulletin of Korean Society of Basic Design & Art. *Korean Society of Basic Design & Art, 12*(1), 25-36.
9 Kye, Y. H. (2014). The spirit of the age in mathematics and art: The Eastern and Western perspective painting. *Journal of Mathematics and System Science, 4*(-), 56-68.
10 Lee, S. R. (2010). Classification of Korean Traditional Patterns by Wallpaper Groups. *Journal of Korea Society of Information Technology, 8*(4), 189-196.

11 Lim, T., & Kim, K. (2005). 전통문양을 활용한 패턴 디자인교육 프로그램 개발에 관한 연구[A Study on the Development of Programs for Pattern Design Education Using the Traditional Patterns]. *In Proceedings of 2005 Fall Conference (*pp. 208–209). Korean Society of Design Science.

12 Polya, G. (1924). XII. Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials, 60*(1), 278–282.

13 Schattschneider, D. (2010). The mathematical side of MC Escher. *Notices of the AMS, 57*(6), 706–718.

14 Shin, H., Lyu, I., Moon, T., & Sheen, S. (2014). *수학 IN 디자인[Mathematics in Design].* Korea Society of Mathematics Education Series 13. Seoul: Kyo Woo Sa.

15 Vezzosi, A. (1996). *Leonard De Vinci : Art et Science de l'Univers.* Paris: Gallimard.

16 Won, Y. (2011). *디자인의 개념과 원리[Basic visual concepts and principles].* Seoul: Ahn Graphics.

문양에 관한 수학적 접근: 군론에 의한 한국 전통 문양의 분류

신현용[1], 신실라[1]

[1]한국교원대학교

연구배경 대칭은 디자인의 주요 요소 중 하나이므로 대칭의 이론인 군론은 문양 디자인의 이해와 분류 그리고 생성에서 유용할 수 있다. 이 글에서는 다음과 같은 연구문제를 설정하고 해결한다.

- 문양에는 어떤 대칭이 있는가?
- 군론에 의한 일곱 개의 띠 타입에는 어떤 종류가 있는가?
- 띠 타입 각각에 해당하는 한국의 전통 문양의 예는 무엇인가?
- 대칭을 적용하여 띠 문양을 생성하는 방법은 무엇인가?

연구방법 문양과 관련되는 군론을 조사하여 처음 문제와 두 번째 문제의 답을 구한다. 두 번째 문제의 해결을 위하여 남한 문양과 북한 문양 각각의 예를 이 글의 목적에 맞게 제시하고자 한다. 마지막 문제에 대해서는 간단한 기본 문양을 하나 주고, 거기에 대칭을 적용하여 여러 문양을 생성하는 방법을 제시한다.

연구결과 문양에서 발견되는 대칭은 평행이동, 회전, 반사, 그리고 미끄럼반사이다. 군론에 의하면 띠 문양은 일곱 개의 타입이 있다. 이 연구에서는 각각의 타입에 해당하는 한국(남 북한) 전통문양을 모두 제시한다. 이 연구는, 또, 기본 모티브가 주어질 때 대칭을 적용하여 새로운 문양을 생성하는 방법을 소개한다.

결론 디자인의 수학적 접근은 논리적이고 체계적인 기준에 근거하며 패턴의 특성을 수치화하기 때문에 객관성을 확보할 수 있다. 따라서 수학적 분류에 따라 전통문양의 예를 제시하는 것은 우리 전통문양의 다양성을 객관적으로 확보하는 것이 될 수 있다. 또, 문양에 관한 수학적 접근은 문양 디자인을 프로그램화하여 컴퓨터를 활용하여 다양한 문양을 디자인할 수 있게 한다.

주제어 띠, 수학, 군론, 대칭, 타입, 전통문양

교신저자: 신실라(twosp@hanmail.net)